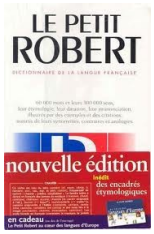
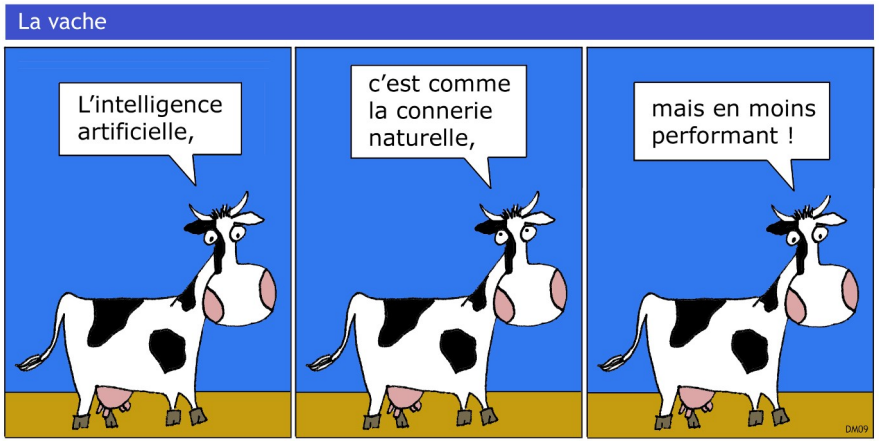
Chapitre 10

L'I. A. des jeux



Intelligence artificielle : Partie de l'informatique qui a pour but la simulation de facultés cognitives afin de suppléer l'être humain pour assurer des fonctions dont on convient, dans un contexte donné, qu'elles requièrent de l'intelligence. Langages : Lisp, Prolog. => Reconnaissance de formes et de la parole, simulation, jeu, conduite de robots, apprentissage.



L'intelligence artificielle (IA) comprend plusieurs domaines :

- le dialogue automatique : se faire comprendre d'un ordinateur en lui parlant ;
- la traduction automatique, si possible en temps réel ou très légèrement différé ;
- le raisonnement automatique (systèmes experts) ;
- l'apprentissage automatique ;
- la reconnaissance de formes, des visages et la vision en général ;
- l'intégration automatique d'informations provenant de sources hétérogènes ;
- l'aide aux diagnostics ;
- l'aide à la décision ;
- la résolution de problèmes complexes, tels que les problèmes d'allocation de ressources ;
- l'assistance par des machines dans les tâches dangereuses, ou demandant une grande précision.

L'intelligence artificielle est utilisée (ou intervient) dans une variété de domaines tels que :

- la banque, avec des systèmes experts d'évaluation de risque lié à l'octroi d'un crédit ;
- le militaire, avec les systèmes autonomes tels que les drones ;
- la médecine, avec les systèmes experts d'aide au diagnostic ;
- la logistique, au travers d'approches heuristiques de type résolution de problème de satisfaction de contraintes ;
- les jeux, domaine qui va plus particulièrement nous intéresser ici.

10.1. Différents types de jeux

Un jeu est un terrain d'expérimentation idéal pour l'intelligence artificielle (IA). Les règles simples et peu nombreuses, les situations bien définies modélisent un mode simplifié mais quand même intéressant. Les jeu bien connu « Les Sim's » en est un bon exemple. Pour l'ordinateur, les choix sont réduits, les configurations faciles à analyser, les conséquences des choix sont calculables. Pensons à des jeux comme les échecs, les dames, mais aussi des jeux où le hasard intervient comme le backgammon, le poker, où l'ordinateur aura à calculer des probabilités.

Le terme d' « intelligence artificielle » est très pompeux. Certains parlent en ce domaine plutôt de force brute. On verra en effet qu'il s'agira uniquement de calculs et d'exploration d'arbre de jeu. Il est vrai que l'ordinateur donne *l'impression* d'une certaine intelligence[1] quand il joue contre un humain. L'auteur se souvient encore du choc qu'il a ressenti quand, dans les années 80, il a joué (et perdu) pour la première fois aux échecs contre une machine. Comment cet objet sans vie faisait-il ? C'est ce que nous allons étudier dans ce chapitre.

10.1.1. Jeux vidéo

C'est dans les jeux vidéo que l'intelligence artificielle s'est le plus popularisée, et c'est aussi un des domaines où elle se développe rapidement. Celle-ci bénéficie en effet des progrès de l'informatique, avec par exemple les cartes graphiques dédiées qui déchargent le processeur principal des tâches graphiques. Le processeur principal peut désormais être utilisé pour développer des systèmes d'IA plus perfectionnés.

MMOG : massively multiplayer online game

Par exemple, l'intelligence artificielle peut être utilisée pour piloter des bots (c'est-à-dire les personnages artificiels) évoluant dans les MMOGs ou les mondes virtuels, mais on peut aussi citer son utilisation dans des jeux de simulation, ou pour animer des personnages artificiels.

Dans le domaine du jeu vidéo, l'IA caractérise toute prise de décision d'un personnage (ou d'un groupe) géré par le jeu, et contraint par l'intérêt ludique. Jusqu'à la fin des années 1990, l'IA dans les jeux vidéo (plus particulièrement dans les jeux en temps réel) a été délaissée par rapport au rendu visuel et sonore. L'évolution vers des univers toujours plus réalistes, leur peuplement par des personnages aux comportements crédibles devient une problématique importante.

Avec les jeux en réseau, le besoin d'IA a tout d'abord été négligé, mais, particulièrement avec l'apparition des jeux massivement multijoueur, et la présence d'un nombre très important de joueurs humains se confrontant à des personnages non joueur (PNJ), ces derniers doivent s'adapter à des situations qui ne peuvent être prévues. Actuellement ces types de jeux intéressent particulièrement des chercheurs en IA.

10.1.2. Jeux de réflexion

Un ordinateur peut simuler la prudence, la malice, voire l'intelligence. Tel est le cas lorsqu'un programme permet à un ordinateur de rivaliser avec un être humain dans un jeu de stratégie qui, à l'évidence, mobilisera la réflexion de ce dernier.

1979 : Le champion du monde battu au Backgammon

Le premier logiciel de valeur, BKG 9.8, a été conçu par Hans **Berliner** dans les années 1970 sur un DEC PDP-10 pour expérimenter l'évaluation des positions des jeux de tablier. Les versions précédentes de BKG n'étaient pas en mesure de battre de manière répétitive des joueurs débutants, mais **Berliner** remarqua que ses erreurs critiques se situaient toujours dans des phases de transition de la partie. Il appliqua les principes de la logique floue pour améliorer son jeu au cours de ces phases, et en juillet 1979, BKG 9.8 devint suffisamment fort pour jouer contre le champion mondial Luigi **Villa**. Il gagna la rencontre 7-1, devenant le premier logiciel à battre un champion du monde dans un jeu de tablier. Berliner constata cependant que la victoire était due en grande partie à la chance du fait d'un plus grand nombre de résultats favorables obtenus par le logiciel.

1 Encore faudrait-il définir ce qu'est l'intelligence...

Dans les années 1980, les informaticiens obtinrent plus de succès avec une approche basée sur l'utilisation de réseaux de neurones artificiels. *TD-Gammon*, développé par Gerald **Tesauro** chez IBM, fut le premier de ces logiciels à atteindre un niveau proche de celui d'un joueur expérimenté. Son réseau de neurones était entraîné par auto-apprentissage. Selon Bill **Robertie** et Kit **Woolsey**, deux grands joueurs de backgammon, le jeu de TD-Gammon était alors à la hauteur, et même au-dessus, de celui des meilleurs joueurs du monde. Woolsey déclara ainsi « Il n'y a aucun doute dans mon esprit que son analyse des positions est de beaucoup supérieure à la mienne. »

Les recherches basées sur les réseaux artificiels de neurones ont abouti à la génération de trois logiciels commerciaux modernes, *Jellyfish*, *Snowie* et e*Xtreme Gammon*, ainsi qu'au partagiciel *BGBlitz* et au logiciel libre *GNU Backgammon*. La force de ces logiciels repose sur des mois d'entraînement de leurs réseaux de neurones sans lesquels ils ne pourraient pas dépasser le niveau d'un joueur novice. La phase de sortie des dames est généralement traitée par les logiciels à partir d'une base de données – obtenue par ordinateur – contenant toutes les positions possibles des dames au moment de la sortie.

1997 : Deep Blue bat Garry Kasparov aux Échecs

Depuis les années 1990, les ordinateurs sont capables de battre le champion de monde d'échecs. Mais l'histoire des programmes d'échecs est longue. Il aura fallu un demi-siècle pour passer d'un programme connaissant les règles du jeu à un ordinateur capable de battre le champion du monde.

Voir [2] pour un historique plus complet.

- 1948, le livre *Cybernétique* de Norbert **Wiener** décrit comment un programme d'échecs peut être développé en utilisant une profondeur minimale de recherche avec une fonction d'évaluation.
- 1951, Alan **Turing** développe sur le papier le premier programme capable de jouer une partie d'échecs complète.
- 1958, les premiers programmes qui sont capables de jouer une partie complète sont créés, le premier par Alex **Bernstein** et l'autre par des programmeurs russes sur mainframe BESM.
- 1966-1967, le premier match entre programmes d'échecs voit le jour. Le programme *Kaissa* de l'Institut de physique théorique et expérimentale de Moscou triomphe de *Kotok-McCarthy* de l'université Stanford. Les coups étaient échangés par télégraphe et le match a duré 9 mois.
- 1967, *Max Hack 6* de Richard **Greenblatt** devient le premier programme à gagner contre une personne en tournoi.
- 1974, *Kaissa* devient le premier champion du monde des ordinateurs.
- 1977, le premier jeu d'échecs électronique, *Chess Challenger*, est commercialisé. Et devient la même année le premier ordinateur à remporter un tournoi d'échecs majeur.
- 1985, *HiTech* réalise une performance Elo de 2530, c'est le premier programme à atteindre le classement de 2400 (niveau d'un maître international).
- 1994, *Fritz 3* gagne une partie de blitz contre le champion du monde de l'époque, Garry **Kasparov** et ils terminent *ex æquo*. Kasparov prend sa revanche dans le départage : 4-1. Cette même année à Londres, *Chess Genius* bat Garry Kasparov en partie semi-rapide (1.5-0.5) avec un Pentium 100 MHz.

- 1997, *Deep Blue* bat Garry **Kasparov** (2 victoires, 3 nulles et 1 défaite).

- 2005, *Hydra* gagne face à Michael **Adams** (5 victoires, 1 nulle, 0 défaite).
- 2006, *Deep Fritz* gagne face à Vladimir **Kramnik** (2 victoires, 4 nulles, 0 défaite).
- 2017, *AlphaZero*, une variante d'*AlphaGo* (voir paragraphe consacré au go) qui pratique l'apprentissage par renforcement (voir chapitre 11), n'a mis que quatre heures en partant des règles de base pour vaincre *Stockfish*, le meilleur programme de jeux d'échecs du moment.

1997 : au tour d'Othello

Dans ce jeu, le but est de retourner les pions adverses en les encerclant. En 1997, quelques mois après la victoire de *DeepBlue* sur **Kasparov**, le logiciel *Logistello* bat le champion du monde d'Othello, Takeshi **Murakami**. Depuis, comme pour les échecs, les programmes ont évolué et battent facilement les humains, mais l'intelligence artificielle n'a toujours pas réussi à « résoudre » parfaitement ce jeu. Nous reviendrons sur ce jeu au § 10.5.

2002 : l'awalé entièrement résolu

L'awalé est un jeu créé en Afrique où les joueurs doivent déplacer des jetons dans 12 récipients, l'un après l'autre, dans le but de capturer les pions adverses. En 2002, des chercheurs néerlandais ont réussi à résoudre le jeu en calculant les quelques 889 milliards de positions possibles, ce qui a pris plus de 51 heures de calcul à l'algorithme.

2008 : Chinook imbattable aux Dames

Des scientifiques canadiens ont mis au point un programme d'ordinateur impossible à battre au jeu de dames. Une formidable avancée dans le domaine de l'intelligence artificielle. Jonathan **Schaeffer**, détenteur de la chaire de sciences informatiques à l'université d'Alberta (Canada), aidé par d'autres informaticiens de cet établissement, se sont acharnés durant 18 ans à programmer les quelque 500 milliards de milliards de combinaisons possibles au jeu de dames, un grand classique du genre répandu dans le monde entier.

Et le résultat est là : *Chinook*, puisque c'est le nom du logiciel, s'avère impossible à battre. Au pire, il conduira une partie jusqu'à une impasse débouchant sur la nullité, et confronté à un autre ordinateur utilisant le même programme, ne produira que des parties nulles.

Pour mettre au point son programme, **Schaeffer** a mobilisé environ 50 ordinateurs quotidiennement depuis 1989, parfois jusqu'à 200 dans les moments critiques, et a fait appel à plusieurs joueurs professionnels.

À l'origine, *Chinook* avait été élaboré pour participer au Championnat du Monde de Dames. Perdant en finale en 1992, il l'a remporté deux ans plus tard en devenant ainsi le premier logiciel à obtenir un titre mondial dans un jeu de compétition. Mais estimant alors que les ordinateurs de nouvelle génération devraient permettre de créer un programme infaillible, **Schaeffer** se remettait au travail en 2001 pour arriver au résultat actuel.

Il est possible de... perdre contre Chinook sur le site http://webdocs.cs.ualberta.ca/~chinook

2015 : Texas Hold'Em limit

Le Poker est un peu particulier. En 2015, des chercheurs ont créé un programme qui est presque sûr de gagner chaque partie de poker. Mais pas n'importe lequel : le « Texas Hold'Em limit » à deux joueurs. À l'instar du jeu de go, le programme apprend de chaque partie jouée et affine sa stratégie. Pour le no-limit à plusieurs joueurs (la version du poker la plus jouée), on est encore très loin d'une intelligence artificielle capable de vaincre les meilleurs joueurs du monde. Les possibilités sont tellement énormes (comment analyser une relance de 10, 100 ou 10'000 dollars ?) qu'il est difficile pour un ordinateur de maîtriser ce jeu. Pour l'instant.

2016 : AlphaGo bat l'un des meilleurs joueurs du monde

Son apparente simplicité semble faire du go un candidat idéal à l'exploration informatique. Mais des difficultés considérables ne tardent pas à surgir. La taille du goban détermine une combinatoire qui dépasse de très loin les possibilités de calcul des ordinateurs (la taille très approximative de l'arbre des possibilités du jeu de go est environ de 10^{600}, le nombre 361!/100! des différentes parties de plus de 260 coups). Cette difficulté est amplifiée par d'autres caractéristiques du jeu : la nature de la condition de victoire, le placement virtuellement illimité de chaque pierre, la nature non locale de la règle du *ko*, le haut niveau de reconnaissance de formes exigé. Pour ces raisons, certains chercheurs en intelligence artificielle considèrent le go comme un meilleur test que les échecs.

À partir de 2006, la programmation du jeu de go a fait des progrès importants notamment grâce à la méthode de Monte-Carlo (on explore seulement certaines parties de l'arbre de jeu, avec une probabilité donnée). Les programmes parviennent désormais à égaler des joueurs de haut niveau sur un goban de taille 9x9 ou à des handicaps de 6 à 9 pierres sur un goban de taille 19x19. En 2009, les meilleurs programmes sont parvenus (en parties rapides) à obtenir un niveau de 1er dan amateur sur le serveur KGS.

Samedi 12 mars 2016, **Lee Sedol**, qui domine le jeu de go depuis une décennie, a perdu son match face à un ordinateur. Le programme, *AlphaGo*, a remporté sa troisième victoire consécutive dans une série de cinq parties à Séoul. Le programme a été développé par **DeepMind**, une start-up rachetée par **Google** spécialisée dans le « deep learning », une méthode permettant aux algorithmes d'apprendre par eux-mêmes pour résoudre un problème. On utilise cette technique notamment pour la reconnaissance d'image ou vocale ; elle a permis à Google de battre le maître mondial du jeu de go. Un exploit que l'on pensait impossible avant longtemps.

En décembre 2017, **DeepMind** dévoile *AlphaZero*, une variante d'*AlphaGo*, qui reprend le principe de l'apprentissage autodidacte par renforcement dans une approche moins spécialisée. En disposant pour seule base des règles des jeux d'échecs, de go et de shogi (variante japonaise des échecs), cette IA est parvenue à atteindre un « niveau de jeu surhumain » et à battre les meilleurs programmes.

10.1.3. Jeux de connaissance

2011 : un ordinateur bat deux champions au Jeopardy

Du nom du fondateur d'IBM, Thomas **Watson**

En remportant deux manches sur trois, *Watson* a gagné 1 million de dollars au jeu Jeopardy (un jeu où on donne la réponse et où il faut deviner la question).

L'écran était installé entre les deux joueurs humains et l'ordinateur, commandé par un opérateur, devait répondre aux questions de culture générale posées par l'animateur. Watson étant sourd et muet, l'opérateur tapait les questions sur le clavier et annonçait ses réponses. Ses adversaires humains n'étaient pas les premiers venus : la machine a combattu en effet les deux plus brillants compétiteurs de l'histoire de ce jeu, revenus sur le plateau pour ce match du siècle.

Avec ses 15 To (téraoctets) de mémoire vive, ses 2.880 processeurs Power 7, Watson n'a rien d'un micro. « S'ils tournaient sur un micro-ordinateur de bureau, les logiciels mettraient 2 heures pour répondre à une question » affirme-t-on chez IBM. Comme ses adversaires, Watson n'avait pas accès à Internet mais avait tout de même un avantage certain : IBM avoue que Watson disposait d'une antisèche équivalent à 200 millions de pages.

10.2. Utilisation de la force brute : Mastermind

Ce jeu de déduction se présente généralement sous la forme d'un plateau perforé de 10 rangées de quatre trous pouvant accueillir des boules de couleurs. Il y a également des pions blancs et noirs utilisés pour donner des indications à chaque tour de jeu.

Un joueur commence par placer des boules sans qu'elles soient vues de l'autre joueur.

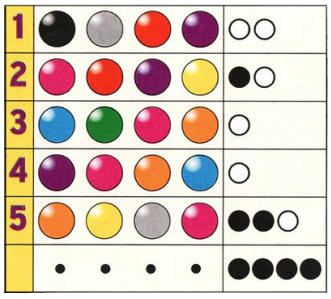
L'autre doit trouver quelles sont les quatre boules, c'est-à-dire leur couleur et leur position.

Pour cela, à chaque tour, le joueur doit se servir de boules pour remplir une rangée selon l'idée qu'il se fait des boules dissimulées. L'autre joueur indique alors :

1. le nombre de boules de la bonne couleur bien placées en utilisant le même nombre de pions noirs ;
2. le nombre de boules de la bonne couleur, mais mal placées, avec les pions blancs.

Exercice 10.1

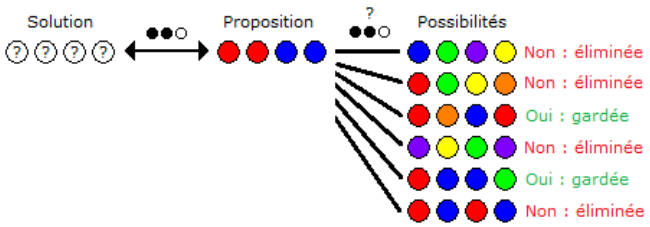
Quelle est la combinaison gagnante ?



Comment l'ordinateur trouve la solution ?

Ce jeu exige beaucoup de déduction et de concentration de la part d'un humain. Cependant, il est facile pour un ordinateur de trouver la combinaison gagnante. Il va au début construire une liste de toutes les solutions possibles (il y en a k^n, où n est le nombre d'emplacements et k le nombre de couleurs des boules).

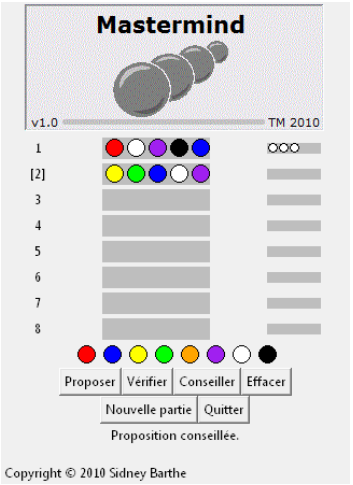
Il va ensuite éliminer de cette liste toutes les configurations impossibles en fonction des pions noirs et blancs, comme l'indique le schéma ci-après. Au bout d'un certain nombre de tours, il ne restera plus qu'une solution possible.



C'est ce qu'on appelle la force brute.

Exercice 10.2

Téléchargez et testez le programme de Sydney **Barthe** disponible sur le site compagnon. Pour voir comment le programme joue, pressez alternativement les touches *Conseiller* puis *Proposer*.



10.3. Les jeux combinatoires

Les jeux combinatoires possèdent les propriétés suivantes :

- Deux joueurs jouent alternativement.
- Les deux joueurs connaissent parfaitement l'état du jeu, c'est-à-dire que le jeu est à information complète.
- Il n'y a aucune intervention du hasard.
- Les règles précisent clairement les coups qu'un joueur peut réaliser à partir d'une position donnée. Les positions accessibles par un joueur sont appelées ses options.
- La partie se termine lorsqu'un joueur ne peut plus jouer, et les règles assurent que toute partie se termine en un nombre fini de coups.
- Le vainqueur est désigné par le dernier coup joué : en convention normale, le premier joueur qui ne peut plus jouer a perdu. C'est l'inverse en convention misère.
- S'il existe des positions avec des options différentes pour les deux joueurs, le jeu est dit partisan, et si les options disponibles sont toujours les mêmes pour les deux joueurs, le jeu est dit impartial.

Comme exemples, on peut mentionner le jeu de Nim, le Hex, le Chomp, etc.

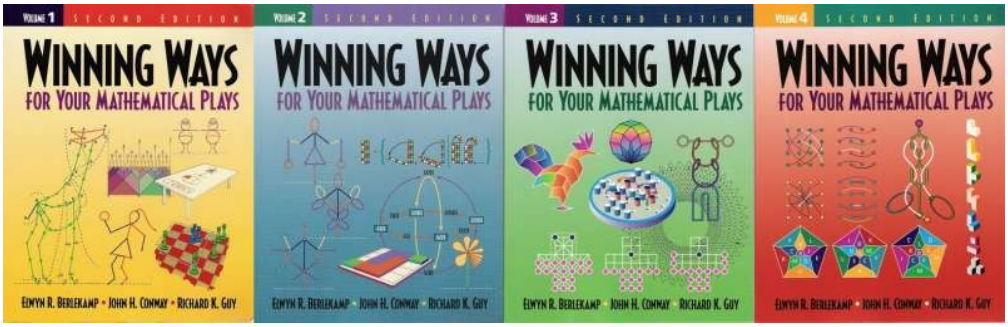
Selon la définition stricte [7], il doit toujours y avoir un gagnant, ce qui exclut pas mal de jeux comme les échecs, les dames, le morpion, le puissance 4, le go, etc. Cependant, certains les considèrent quand même comme des jeux combinatoires.

Un jeu impartial particulièrement important est le jeu de Nim, complètement résolu en 1901 par C. L. **Bouton**. Puis, en 1907, Willem **Wythoff** invente et publie une solution du jeu de Wythoff, une variante du jeu de Nim. Dans les années 1930, **Sprague** et **Grundy** démontrent indépendamment le

théorème de Sprague-Grundy, qui stipule que tout jeu impartial est équivalent à un certain tas du jeu de Nim.

Les premiers jeux partisans, dans lesquels les coups disponibles ne sont plus forcément identiques pour les deux joueurs, semblent avoir été considérés par John Milnor en 1953, mais c'est la rencontre de Elwyn **Berlekamp**, John **Conway** et Richard **Guy** qui est le point de départ d'une théorie complète dans les années 1960.

Le premier livre traitant de la théorie des jeux partisans, *On Numbers and Games*, est publié par John **Conway** en 1976. Puis, en 1982, l'ensemble des résultats de **Berlekamp**, **Conway** et **Guy** est publié dans leur livre *Winning Ways for your Mathematical Plays*, qui reste à ce jour la référence en la matière.



10.4. Le jeu de Nim

Origines

Source : [8]

Charles Leonard **Bouton** (1869-1922)

Dans son article de 1901, le mathématicien américain Charles **Bouton** expose et solutionne le jeu qu'il baptise Nim sans que nous sachions si Nim provient de l'allemand *Nimm* qui signifie prendre, du verbe de l'ancien anglais *Nim* qui avait le même sens, ou si c'est une astuce graphique puisqu'en retournant NIM, on obtient le mot anglais *WIN* qui signifie gagner.

Ce serait compter sans l'un des pionniers des récréations mathématiques, l'italien Luca **Pacioli**. Nous voilà sur les rives de la Méditerranée… au tournant du XVe et du XVIe siècle ! Car le traité qui nous intéresse a été écrit entre 1496 et 1508 et, dans son problème XXXIII évoque la question de « finir n'importe quel nombre avant son adversaire sans pouvoir prendre plus qu'un nombre donné ».

Derrière cet énoncé cryptique, on pourrait imaginer bien des choses mais la solution est bien plus éclairante : « deux joueurs doivent atteindre le nombre 30 en ajoutant des nombres de 1 à 6 » et l'on reconnaît là ce que l'on pourrait désormais baptiser jeu de « prendi ».

Notons qu'un tel énoncé apparaît en 1612 sous la plume de Claude-Gaspard **Bachet de Méziriac** dans ses *Problèmes plaisans et délectables* qui se font avec les nombres et qu'on retrouve un tel jeu chez André-Joseph **Pancoucke** en 1749 sous le nom de *jeu des cavaliers* car les cavaliers pouvaient y jouer à cheval sans avoir besoin de cartes qui n'auraient pas été pratiques du tout. Par la suite, ce même jeu apparaît sous la plume de William **Hooper** en 1774, même si sa version utilisait des éléments visuels comme support. En 1820, on retrouve une nouvelle version sous la plume de John **Badcock** qui se contente de reprendre ce qu'avait fait William **Hooper**.

Remarquons que des jeux associés au jeu de Nim existent aussi en Chine (jeu de Fan-Tan) ou en Afrique (jeu de Tiouk-Tiouk) mais il n'est pas évident d'en trouver l'origine historique.

Le jeu de Nim sur une seule ligne

On dispose d'une ligne de k allumettes (par exemple 16). Deux joueurs doivent, tour à tour, prélever entre 1 et 3 allumettes. Dans la variante normale, le perdant est le joueur qui ne peut plus jouer (ou, autrement dit, le gagnant est le joueur qui prend la dernière allumette).

Question : Peut-on décrire une stratégie permettant de garantir que l'un des deux joueurs (le premier à jouer ou son adversaire) gagne à tous les coups ? Et pour un nombre initial d'allumettes différent ?

On peut répondre à la question en partant du cas trivial à 0 allumette, et raisonner de proche en proche pour des lignes plus grandes :

On qualifie ce raisonnement de rétrograde ou de raisonnement par induction (backward induction).

- Il est clair que s'il reste entre 1 et 3 allumettes, la partie peut être gagnée par le joueur suivant (celui dont c'est le tour de jouer) en prenant toutes les allumettes.
- Supposons qu'il reste 4 allumettes. Quoi que joue le joueur suivant, il restera entre 1 et 3 allumettes, donc par l'observation précédente, la situation à 4 allumettes est perdante pour le joueur dont c'est le tour de jouer.
- Ainsi, s'il reste 5, 6 ou 7 allumettes, le premier joueur peut gagner en amenant son adversaire à la situation à 4 allumettes. Pour la même raison que précédemment la position à 8 allumettes est perdante pour le premier joueur.
- En raisonnant de proche en proche, on peut ainsi déterminer que les positions 0, 4, 8, 12 et 16 sont perdantes pour le joueur qui commence, toutes les autres étant gagnantes.

En particulier, la position 16 est perdante pour le premier joueur. Son seul espoir de gagner est que l'autre joueur fasse une erreur…

Enfin, si l'on considère un nombre initial d'allumettes k quelconque, on peut facilement voir que le joueur qui commence peut gagner à coup sûr si k n'est pas un multiple de 4, et que son adversaire peut gagner à coup sûr sinon.

Positions P, positions S

Autrement dit, depuis une position **P**, on va perdre si c'est à nous de jouer.

Revenons au jeu de Nim sur une seule ligne. On a vu que les positions 0, 4, 8, 12, 16… sont les positions gagnantes pour le joueur qui vient de jouer. On parle de positions **P** (comme **P**récédent). Les autres positions sont gagnantes pour le joueur **S**uivant, on les appelle des positions **S**.

De manière plus générale, dans tout jeu combinatoire impartial satisfaisant la condition de terminaison, et sous le mode de jeu normal, la nature **P** ou **S** des positions obéit à la caractérisation suivante :

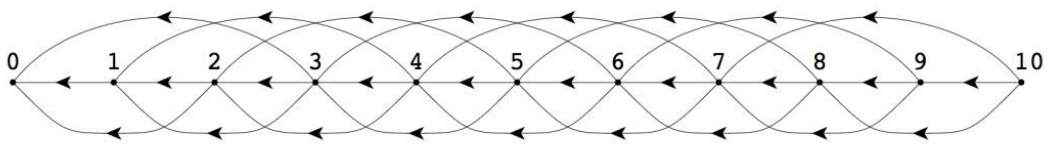
1. Toute position terminale est une position **P**.
2. Depuis toute position **S** on peut atteindre une position **P** en un coup.
3. Depuis toute position **P**, tous les coups amènent à une position **S**.

Dans ces jeux, on peut en principe déterminer la nature de chaque position par induction sur l'ordre des positions pouvant apparaître au cours d'une partie, en partant des positions terminales (celles depuis aucun coup n'est possible). Il suffit pour cela d'étiqueter toutes les propositions terminales comme **P** (ou **S** dans un jeu de misère), et d'étiqueter itérativement les positions dont tous les successeurs sont déjà étiquetés, jusqu'à saturation :

- Si l'un des successeurs d'une position est marqué **P**, la marquer **S** ;
- Si tous les successeurs d'une position sont marqués **S**, la marquer **P**.

Exercice 10.3

Voici un graphe du jeu de Nim à une ligne avec $k = 10$ allumettes. Les nombres indiquent le nombre d'allumettes.

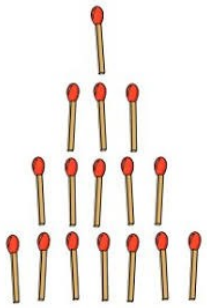


a. Étiquetez les sommets **P** ou **S** dans la variante normale du jeu.
b. Étiquetez les sommets **P** ou **S** dans la variante misère du jeu.

Le jeu de Nim à plusieurs lignes

On dispose à présent d'un certain nombre d'objets identiques répartis en n lignes de diverses tailles $k_1, \ldots, k_n$. Deux joueurs jouent à tour de rôle. À chaque tour de jeu, le joueur prend un certain nombre d'objets dans une seule ligne de son choix, sans limite sur le nombre d'objets pris simultanément.

Ce jeu a été popularisé par le film d'Alain **Resnais**, *L'année dernière à Marienbad* (1961), où il est joué (dans sa version « misère ») avec quatre rangées de 1, 3, 5 et 7 allumettes respectivement.



Nim-somme

La Nim-somme de deux nombres entiers positifs ou nuls a et b, notée $a \oplus b$, est leur addition chiffre à chiffre, sans retenue, en base deux. On parle aussi d'opération « ou exclusif ».

On peut aussi voir la Nim-somme comme des bits de parité. En effet, chaque bit vaut 1 si le nombre de 1 dans la colonne est impair, et vaut 0 sinon.

Par exemple :

$$\begin{array}{rl} & (010110)_2 \\ \oplus & \underline{(110011)_2} \\ = & (100101)_2 \end{array}$$

Autrement dit, $22 \oplus 51 = 37$.

Cette opération est...

- associative : $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
- commutative : $a \oplus b = b \oplus a$;
- admet 0 comme identité : $a \oplus 0 = a$;
- de plus, chaque nombre est son propre opposé ($a \oplus a = 0$), ce qui implique que la règle d'annulation s'applique : si $a \oplus b = a \oplus c$ alors $b = c$.

La Nim-somme a été utilisée par Charles **Bouton** dans son article :

Théorème Une position (x_1, x_2, x_3) du jeu de Nim à trois lignes est une position **P** si et seulement si $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$.

On peut par exemple vérifier les observations précédentes, et constater que la position (13, 12, 8) est une position **S**, car $13 \oplus 12 \oplus 8 = 9$. En effet :

$$\begin{array}{rl} & (1101)_2 \\ \oplus & (1100)_2 \\ \oplus & \underline{(1000)_2} \\ = & (1001)_2 \end{array}$$

Note : Ce théorème fonctionne avec un nombre de lignes quelconque.

Démonstration du théorème

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de positions de Nim-somme 0, et $\mathcal{S}$ son complémentaire. On vérifie sur ces ensembles les trois conditions données ci-dessous sur les positions **P** et **S**.

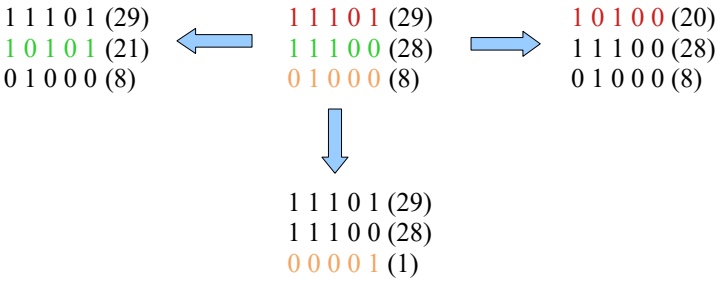
1. Toute position terminale est une position **P**.
   Trivial puisque 0 ⊕ 0 ⊕ ... = 0.

2. Depuis toute position **S** on peut atteindre une position **P** en un coup.
   Soit *i* la place du chiffre le plus significatif de l'écriture en base 2 de la Nim-somme de la position courante. Dans l'écriture en base 2 de chacun des nombres d'allumettes présents dans les lignes, on trouve donc un nombre impair de 1 à la place *i*. Un coup optimal est obtenu en retirant à l'une des lignes avec un 1 à la place *i* l'unique nombre d'allumettes qui permette de rendre la Nim-somme nulle (ce qui est toujours possible car la colonne *i* correspond au chiffre le plus significatif de la Nim-somme).
   Par exemple, soit la position :

Donc, si on joue correctement, on est sûr de gagner depuis une position **S**, si c'est à nous de jouer, puisque on va amener notre adversaire sur une position **P**.

```
                  1 1 1 0 1  (29)
                  1 1 1 0 0  (28)
                  0 1 0 0 0  (8)
la Nim-somme est : 0 1 0 0 1
                    i
```

   C'est donc une position **S**. On peut atteindre 3 positions **P** avec une Nim-somme nulle :



3. Depuis toute position **P**, tous les coups amènent à une position **S**.
   Comme on ne change qu'une ligne, le changement d'un moins un chiffre va forcément rendre la Nim-somme non nulle, puisqu'il y aura toujours dans au moins une des collones un nombre impair de 1.

On peut noter que le point 2 fournit une stratégie pour gagner à coup sûr depuis toute position **S**. On observe aussi que, depuis chaque position **S**, il existe autant de coups optimaux que de piles dont l'écriture binaire du nombre d'allumettes a un 1 en position *i* (qui est toujours un nombre impair).

En pratique

Pas facile d'appliquer cette méthode de tête ! Voici une méthode pratique. Séparez les lignes en paquets ayant chacun un nombre d'allumettes qui est une puissance de 2.

Par exemple, en partant de la disposition :

```
I I I I I I I I I I I    (11)
I I I I I I I I          (9)
I I I I I I I            (7)
```

vous obtenez :

```
I I I I I I I I                I I          I          (11 = 8 + 2 + 1)
I I I I I I I I                             I          (9 = 8 + 1)
                    I I I I    I I          I          (7 = 4 + 2 + 1)
```

Il est facile maintenant de voir si oui ou non il y a un nombre pair de paquets dans chaque colonne. Si c'est le cas, et que c'est à vous de jouer, vous ne gagnerez pas face à un adversaire averti,

car vous êtes en situation perdante. Sinon, il existe une façon de jouer qui conduit à une configuration dont chaque colonne contient un nombre pair de paquets. Ici, on voit qu'il faut enlever le paquet I I I I de la dernière ligne, ainsi que le paquet I, c'est-à-dire 5 allumettes à la ligne qui en contient 7.

Exercice 10.4

Déterminez un ou plusieurs coups optimaux depuis la position (13, 12, 8) dans le jeu de Nim à trois piles, c'est-à-dire des coups amenant à une position **P**.

Idem avec (13, 10, 3, 1).

Jeu en mode misère

Toutes sortes de variantes du jeu de Nim classique ont été envisagées et résolues. La première est la variante « misère » : on y convient que le joueur qui prend la dernière allumette perd.

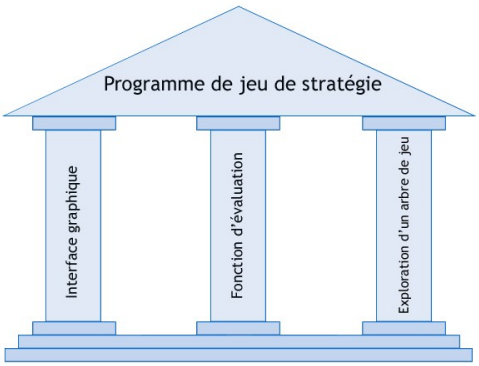
La solution est la suivante : vous jouez comme dans le jeu normal en appliquant la règle de **Bouton**, sauf si votre coup conduit à une situation où il ne reste que des paquets d'une seule allumette, auquel cas vous jouez de façon à laisser un nombre impair de paquets d'une allumette (au lieu d'en laisser un nombre pair, ce que le théorème de **Bouton** vous soufflerait). Bien sûr, dès lors, vous êtes certain de gagner.

Cette solution est un peu étonnante puisqu'elle signifie que partant par exemple de (11, 9, 7), le joueur qui commence est certain de gagner, que ce soit la règle normale qui détermine le gagnant ou que ce soit la règle misère. Il jouera exactement les mêmes coups, sauf, par exemple, quand arrivé à (1, 1, 3) qui l'aurait conduit à jouer (1, 1, 0), il choisira de jouer (1, 1, 1) pour le jeu en mode misère.

Exercice 10.5

Faites la fiche 10.2 proposée sur le site web compagnon.

10.5. Les trois piliers d'un jeu de stratégie



10.5.1. Interface graphique

Une interface graphique (en anglais *GUI* pour *graphical user interface*) est un dispositif de dialogue homme-machine, dans lequel les objets à manipuler sont dessinés sous forme de pictogrammes à l'écran, que l'usager peut opérer en imitant la manipulation physique de ces objets avec un dispositif de pointage, le plus souvent une souris. Ce type d'interface a été créé par Xerox en 1981 pour remplacer les interfaces en ligne de commande, puis popularisé par Apple avec l'ordinateur Macintosh quelques années plus tard.

Pour les jeux, cette interface graphique peut être plus ou moins élaborée. Elle est simple pour des jeux comme les dames ou les échecs, et très complexes pour des jeux en trois dimensions.

Ci-dessous, l'interface graphique de *Myth II* :

10.5.2. Fonction d'évaluation

Comme son nom l'indique, cette fonction a pour but d'évaluer une position : un nombre très grand sera l'indice d'une excellente position, tandis qu'un nombre très petit (généralement négatif, mais cela dépend de l'échelle choisie) traduira une position catastrophique.

Comment obtient-on une « bonne » fonction, c'est-à-dire une fonction qui traduit fidèlement la réalité ? Une fonction d'évaluation *f* est généralement une somme pondérée de la forme :

$$f(P) = a_1 \cdot c_1(P) + a_2 \cdot c_2(P) + \ldots + a_n \cdot c_n(P)$$

où les a_i sont des *poids* (des nombres réels) et les c_i des *caractéristiques* d'une position P (par exemple, aux échecs, le nombre de pions doublés, les pions occupant le centre, le nombre de fous pris à l'adversaire, le nombre de fous perdus, etc.). Trouver les caractéristiques d'un jeu n'est généralement pas chose facile, et les programmeurs ont souvent recours à des experts pour les y aider. Quant aux poids, qui traduisent le fait qu'une caractéristique est plus importante qu'une autre, leur ajustement fait plus appel à l'empirisme et à l'expérience du programmeur qu'à une méthode rigoureuse.

Une fonction d'évaluation peut aussi être « apprise » à l'aide d'un algorithme d'apprentissage à partir d'un ensemble de parties jouées.

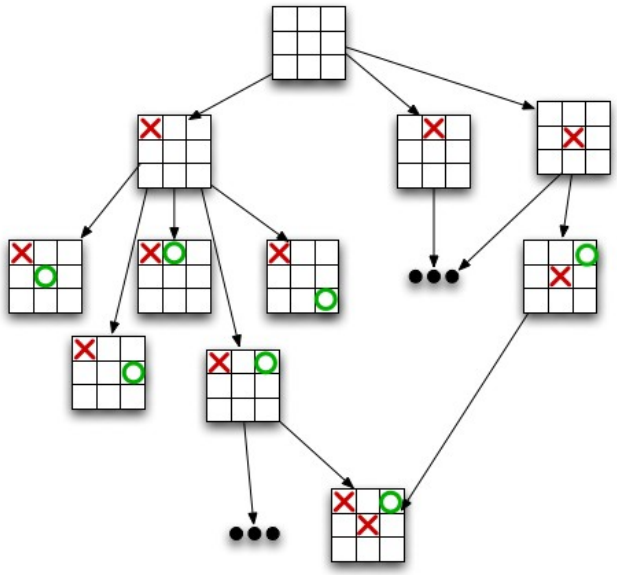
10.5.3. Arbre de jeux

Un arbre de jeu consiste à représenter virtuellement, sous forme d'un arbre orienté, toutes les positions que l'on peut atteindre à partir de celles du coup précédent.

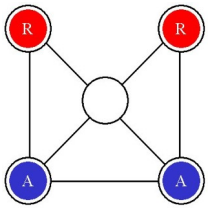
Selon le jeu, cet arbre devient gigantesque à partir de peu d'étages déjà. Aux échecs par exemple, les blancs ont le choix entre 20 coups (16 coups de pions et 4 coups de cavaliers) pour débuter la partie. Cela fait donc déjà 20 branches qui partent du sommet. Ensuite, les noirs ont aussi 20 coups à disposition. Cela fait déjà 400 positions possibles après 2 coups, puisque 20 branches partent des 20 positions précédentes !

Autant dire, qu'il est impossible de dessiner l'arbre de jeu complet, sauf pour des jeux très simples. Aussi doit-on élaguer l'arbre pour éliminer les positions manifestement mauvaises pour le joueur. Nous verrons plus tard comment s'y prendre.

Il est à noter qu'un arbre de jeu est une représentation virtuelle de tous les coups possibles. Dans le programme de jeu, il ne s'agira pas d'implémenter un arbre comme nous l'avions fait au chapitre 6.



Exercice 10.6



Vous voyez ci-contre le tablier du jeu **Pong Hau K'i**. Chaque joueur bouge à tour de rôle un des jetons de sa couleur sur la seule intersection disponible. Le but du jeu est de coincer l'adversaire.

Ce jeu est l'un des rares assez simples pour que l'on puisse dessiner l'arbre de jeu complet.

1. Combien y a-t-il de positions possibles ? Combien sont gagnantes ?
2. Dessinez l'arbre de ce jeu, en supposant que les bleus commencent. Que constatez-vous ?
3. Dessinez l'arbre de ce jeu, en supposant que les rouges commencent. Que constatez-vous?

Conseil : utilisez une feuille A3 !

Remarque : dessinez un graphe plutôt qu'un arbre, c'est-à-dire que vous pouvez relier une position à une position déjà rencontrée, et ainsi « remonter » dans l'arbre.

10.5.4. Algorithme minimax

L'algorithme minimax est un algorithme qui s'applique à la théorie des jeux pour les jeux à deux joueurs à somme nulle. Dans un jeu à somme nulle, la somme des gains de tous les joueurs est égale à 0. Par exemple, si l'on définit le gain d'une partie de tic-tac-toe comme 1 si on gagne, 0 si la partie est nulle et −1 si on perd, le tic-tac-toe est un jeu à somme nulle.

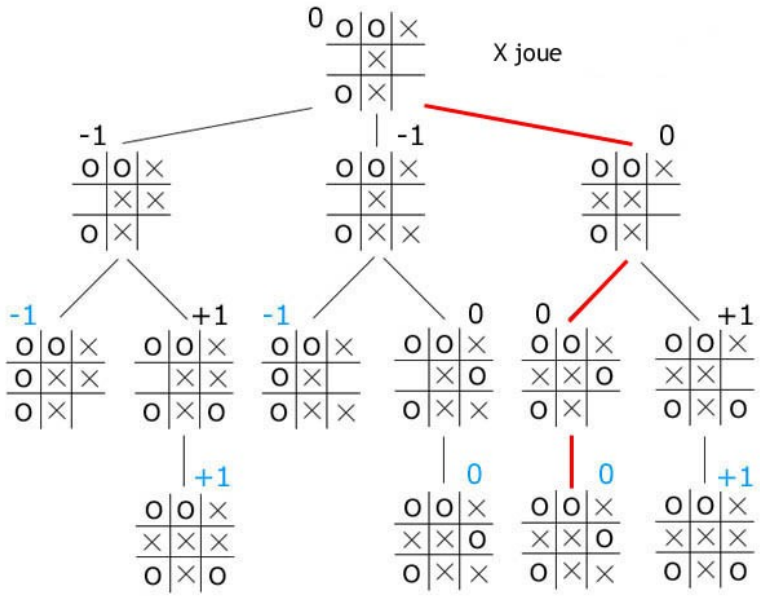
Cet algorithme amène l'ordinateur à passer en revue toutes les possibilités pour un nombre limité de coups et à leur assigner une valeur qui prend en compte les bénéfices pour le joueur et pour son opposant. Le meilleur choix est alors celui qui minimise les pertes du joueur tout en supposant que l'opposant cherche au contraire à les maximiser.

Principe

L'algorithme minimax est très simple : on visite l'arbre de jeu pour faire remonter à la racine une valeur (appelée « valeur du jeu ») qui est calculée récursivement.

Soit p un nœud de l'arbre de jeu et f est une fonction d'évaluation de la position du jeu. Alors :

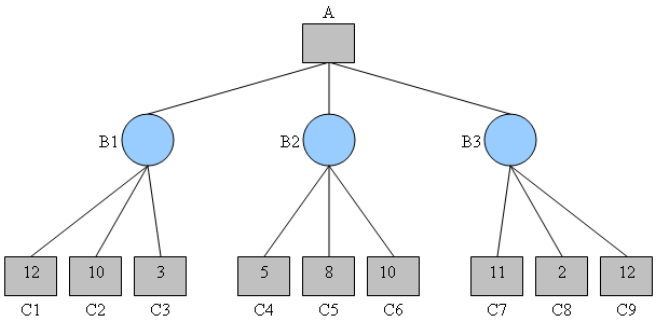
- valeur(p) = f (p) si p est une feuille de l'arbre
- valeur(p) = MAX(valeur(O_1), …, valeur(O_n)) si p est un nœud Joueur ayant pour fils O_i
- valeur(p) = MIN(valeur(O_1), …, valeur(O_n)) si p est un nœud Opposant ayant pour fils O_i



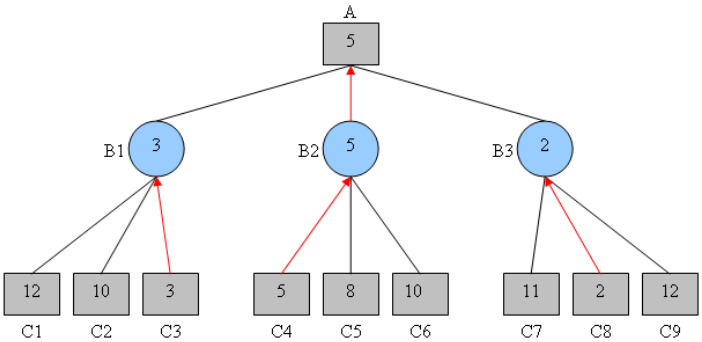
Fin d'une partie de Tic-tac-toe. Si les deux adversaires jouent juste (chemin rouge), la partie sera nulle (score de 0).
+1 indique une victoire des x.
-1 indique une victoire des o.

Exemple

Dans le schéma ci-après, les nœuds gris représentent les nœuds Joueur et les bleus les nœuds Opposant.



Pour déterminer la valeur du nœud A, on choisit la valeur maximum de l'ensemble des nœuds B_i (A est un nœud Joueur). Il faut donc déterminer les valeurs des nœuds B_i qui reçoivent chacun la valeur minimum stockée dans leurs fils (les nœuds B_i sont Opposant). Les nœuds C_i sont des feuilles, leur valeur peut donc être calculée par la fonction d'évaluation.



Le nœud A prend donc la valeur 5. Le joueur doit donc jouer le coup l'amenant en B2. En observant l'arbre, on comprend bien que l'algorithme considère que l'opposant va jouer de manière optimale : il prend le minimum. Sans ce prédicat, on choisirait le nœud C1 qui propose le plus grand gain et le prochain coup sélectionné amènerait en B1. Mais alors on prend le risque que l'opposant joue C3 qui propose seulement un gain de 3.

En pratique, la valeur théorique de la position *P* ne pourra généralement pas être calculée. En conséquence, la fonction d'évaluation sera appliquée sur des positions non terminales. On considérera que plus la fonction d'évaluation est appliquée loin de la racine, meilleur est le résultat du calcul. C'est-à-dire qu'en examinant plus de coups successifs, nous supposons obtenir une meilleure approximation de la valeur théorique donc un meilleur choix de mouvement.

C'est de cette façon que l'on déterminera la force d'un programme : plus il descendra bas dans l'arbre, plus il sera redoutable (en supposant qu'il a une bonne fonction d'évaluation). La profondeur ne devra d'ailleurs pas forcément être la même pour tous les nœuds.

10.5.5. Élagage alpha-bêta

Il existe différents algorithmes basés sur le minimax permettant d'optimiser la recherche du meilleur coup, en limitant le nombre de nœuds visités dans l'arbre de jeu. Le plus connu est l'élagage alpha-bêta. En pratique, l'arbre est souvent trop vaste pour pouvoir être intégralement exploré (comme par exemple pour le jeu d'échecs ou de go). Seule une fraction de l'arbre est alors explorée.

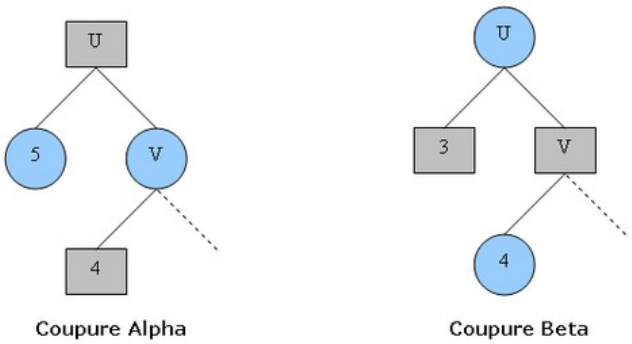
L'élagage alpha-bêta (*alpha-beta pruning* en anglais) est une technique très utilisée permettant de réduire le nombre de nœuds évalués par l'algorithme minimax.

L'algorithme minimax effectue en effet une exploration complète de l'arbre de recherche jusqu'à un niveau donné, alors qu'une exploration partielle de l'arbre est généralement suffisante : lors de l'exploration, il n'est pas nécessaire d'examiner les sous-arbres qui conduisent à des configurations dont la valeur ne contribuera sûrement pas au calcul du gain à la racine de l'arbre. L'élagage α-β nous permet de réaliser ceci.

Plus simplement, l'élagage α-β évite d'évaluer des nœuds dont on est sûr que leur qualité sera inférieure à un nœud déjà évalué, il permet donc d'optimiser grandement l'algorithme minimax sans en modifier le résultat.

Principe

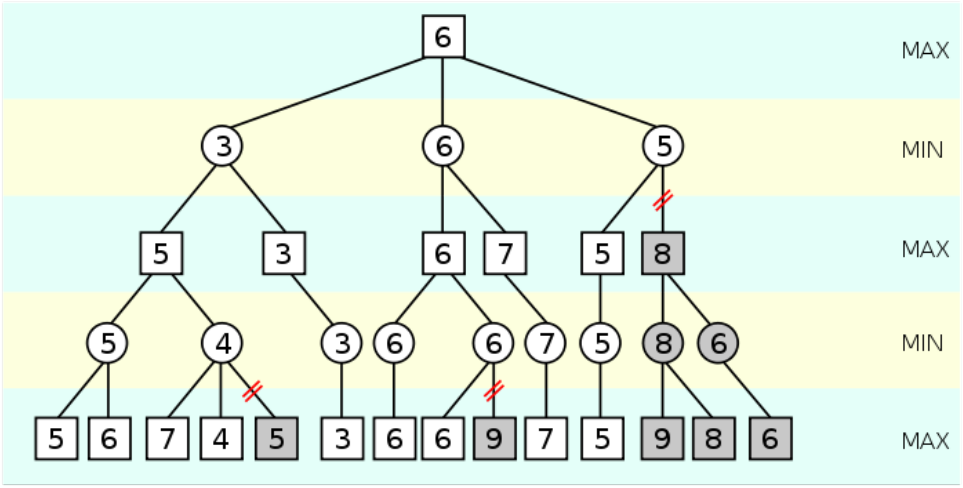
Le schéma ci-dessous présente les deux types de coupures possibles. Les nœuds Min sont représentés par un rond bleu et les nœuds Max par un carré gris. Rappel : les nœuds Min prennent la valeur minimum de leurs fils (et respectivement maximum pour les nœuds Max).



Coupure Alpha : le premier fils du nœud Min V vaut 4 donc V vaudra au plus 4. Le nœud Max U prendra donc la valeur 5 (maximum entre 5 et une valeur inférieure ou égale à 4).

Coupure Beta : le premier fils du nœud Max V vaut 4 donc V vaudra au minimum 4. Le nœud Min U prendra donc la valeur 3 (minimum entre 3 et une valeur supérieure ou égale à 4).

Voici le résultat de l'élagage sur l'arbre ci-dessous déjà étiqueté avec les valeurs d'un minimax.



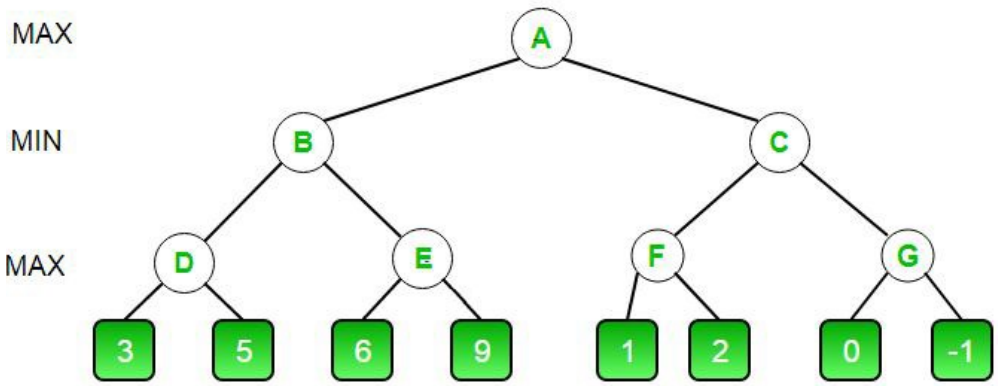
Minimax avec élagage alpha-bêta

Trois coupures ont pu être réalisées :

1. Le nœud MIN vient de mettre à jour sa valeur courante à 4. Celle-ci, qui ne peut que baisser, est déjà inférieure à α=5, la valeur actuelle du nœud MAX précédent. Celui-ci cherchant la valeur la plus grande possible, ne la choisira donc de toute façon pas.
2. Le nœud MIN vient de mettre à jour sa valeur courante à 6. Celle-ci, qui ne peut que baisser, est déjà égale à α=6, la valeur actuelle du nœud MAX précédent. Celui-ci cherchant une valeur supérieure, il ne mettra de toute façon pas à jour sa valeur que ce nœud vaille 6 ou moins.
3. Le nœud MIN vient de mettre à jour sa valeur courante à 5. Celle-ci, qui ne peut que baisser, est déjà inférieure à α=6, la valeur actuelle du nœud MAX précédent. Celui-ci cherchant la valeur la plus grande possible, ne la choisira donc de toute façon pas.

Exercice 10.7

1. Donnez les valeurs des nœuds de l'arbre ci-dessous en suivant l'algorithme minimax.



2. Refaites ensuite l'exercice avec l'élagage alpha-bêta.

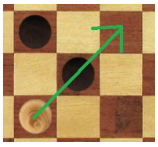
10.6. Le jeu de Shadi

Le jeu de Shadi est un jeu de plateau stratégique dont la règle simple est proche du jeu de Dames.

C'est le jeu idéal pour se faire la main et découvrir les algorithmes IA les plus connus (Monte-Carlo, UCT, Alpha-Bêta, Deep Learning, ...).

Il a été créé[2] par Frédéric Boissac en septembre 2019.

Règles du jeu de Shadi



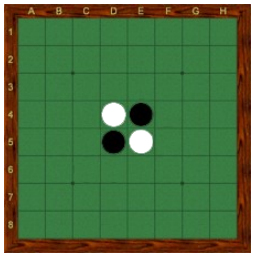
- Les joueurs jouent chacun à leur tour. Les blancs commencent.
- Chaque pion peut se déplacer d'une case vers l'avant en diagonale.
- Un pion peut en prendre un autre en sautant par dessus un pion adverse.
- La prise peut également s'effectuer en arrière.
- La prise est obligatoire mais non multiple (une seule prise à la fois).
- Si un des joueurs est dans l'impossibilité de jouer, il perd la partie.
- Le joueur qui parvient le premier à atteindre la dernière rangée avec un pion est vainqueur.

Exercice 10.8

Téléchargez le logiciel Dariush-Shadi sur le site de l'auteur (voir [12]), étudiez-le, puis modifiez-le pour créer votre propre moteur IA.

- Dans le répertoire « moteurs » copiez le module « Moteur-Candidat » et renommez-le à votre convenance.
- La fonction `Trouve_Un_Coup()` est obligatoire et doit renvoyer un tuple correspondant au coup. Le tuple coup = (a, b, i, j) donne les coordonnées (a, b) du pion joué et celles de sa case d'arrivée.
- En dehors de cette fonction vous êtes libre de faire tout ce que vous voulez.
- Une fois créé, vous pouvez importer votre moteur dans Dariush-Shadi à l'aide du menu.
- À partir du menu vous pouvez faire jouer Noir ou Blanc avec les moteurs de votre choix.
- Les coordonnées vont de (0, 0) case en haut à gauche jusqu'à (9, 9) en bas à droite.

2 Voir [11]



10.7. Othello

Dans le Reversi original, il n'y a aucun pion posé en début de partie, les ouvertures sont donc libres. Une partie d'Othello débute avec 4 pions placés au centre.

Othello est basé sur le jeu Reversi qui a été inventé en 1883 par l'Anglais Lewis **Waterman**, et acquis une popularité considérable en Angleterre à la fin du XIXe siècle. Le jeu d'Othello sous sa forme actuelle a été commercialisé pour la première fois au Japon en 1971.

C'est un jeu de stratégie à deux joueurs : Noir et Blanc. Il se joue sur un damier vert de 64 cases, 8 sur 8.

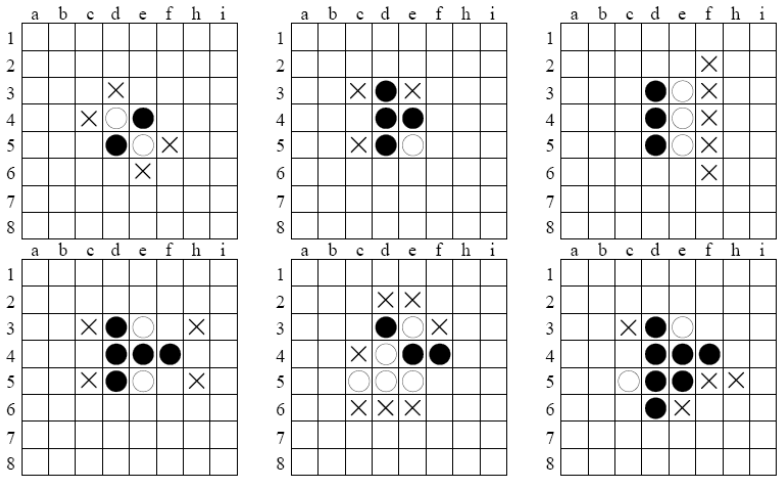
Ces joueurs disposent de 64 pions bicolores, noirs d'un côté et blancs de l'autre. Par commodité, chaque joueur a devant lui 30 pions (2 de sa couleur sont déjà placés sur le plateau au début de la partie, comme montré sur le schéma ci-dessus).

But du jeu

Avoir plus de pions de sa couleur que l'adversaire à la fin de la partie.

Celle-ci s'achève quand aucun des deux joueurs ne peut plus jouer de coup légal.

La pose d'un pion



6 premières positions d'une partie d'Othello. La position initiale du jeu est celle en haut à gauche et c'est le joueur noir qui débute la partie. Le premier coup de noir est 'd3', la réplique de blanc est 'e3', puis noir joue en 'f4' et blanc en 'e5', et le dernier coup joué par noir est 'd6'.

À son tour de jeu, le joueur doit poser un pion de sa couleur sur une case vide du plateau, adjacente à un pion adverse. En posant son pion, il doit encadrer un ou plusieurs pions adverses entre le pion qu'il pose et un pion de sa couleur, déjà placé sur le plateau, que ce soit sur une ligne horizontale, verticale ou diagonale.

Les pions encadrés sont alors retournés en pions de couleur inverse. Les pions ne sont jamais retirés du plateau, ni déplacés d'une case à l'autre.

Si un joueur ne peut pas poser de pions, il passe son tour.

Force des programmes

Depuis 1995 et le programme *Logistello* de Michael **Buro**, l'ordinateur est beaucoup plus fort que l'humain au jeu d'Othello.

Les programmes d'Othello sont relativement simples à écrire. Aussi est-il devenu classique de développer un programme d'Othello pendant ses études d'informatique.

Analyse du programme Othello-py

http://ow.ly/5iIy8

Nous allons analyser un programme jouant à Othello[3]. Je l'ai francisé et modifié pour qu'il soit compatible avec Python 3. Allez sur le site compagnon pour télécharger cette version remaniée.

Le programme se compose de quatre modules :

- « minimax »
  - explore l'arbre de jeu
- « othello »
  - implémente le jeu Othello (coups légaux, retournement des pions, fin de partie, etc.)
  - contient la fonction d'évaluation (« edge_eval »)
- « game2 »
  - gère la partie elle-même (tour de jeu, temps de réflexion, gain de la partie, etc.)
  - permet de tester des parties ordinateur contre ordinateur
  - peut être exécuté sans passer par l'interface graphique
- « othello_gui »
  - est l'interface graphique
  - à exécuter pour qu'un humain joue contre l'ordinateur

Exercice 10.9

1. Téléchargez ces quatre modules et analysez-les attentivement. En particulier,
   - comment fonctionne l'élagage alpha-bêta dans le module « minimax » ?
   - comment est calculée la fonction d'évaluation ?
2. Modifiez la fonction d'évaluation pour tenter de rendre le programme encore plus fort. Testez votre fonction comme indiqué dans les commentaires en bas du module « game2 ».

Sources

[1] Wikipédia, « Intelligence artificielle », <https://fr.wikipedia.org/wiki/Intelligence_artificielle>

[2] Wikipédia, « Programme d'échecs », <https://fr.wikipedia.org/wiki/Programme_d'échecs>

[3] Wikipédia, « Backgammon », <https://fr.wikipedia.org/wiki/Backgammon>

[4] Wikipédia, « Jeu de Go », <https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_go>

[5] Barthe Sidney, *Mastermind. Un jeu compliqué ?*, Travail de maturité, février 2010

[6] Wikipédia, « Théorie des jeux combinatoires », <https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_des_jeux_combinatoires>

[7] Berlekamp, Conway et Guy, *Winning Ways*, 1981

[8] Antoine Meyer, « Autour des jeux de Nim », <https://zitt.perso.math.cnrs.fr/nim.pdf>, 2018

[9] Wikipédia, « Jeu de Marienbad », <https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_Marienbad>

[10] Wikipédia, « Algorithme Minimax », <https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_minimax>

[11] Wikipédia, « Élagage alpha-bêta », <https://fr.wikipedia.org/wiki/élagage_alpha-bêta>

[12] Le jeu de Shadi, <https://sites.google.com/view/jeu-shadi/accueil>

[13] Fédération française d'Othello, <https://www.ffothello.org/>

[14] Othello-py, <https://code.google.com/p/othello-py/>

3 Voir [13]